פרויקט מחקר לקיץ:

דינמיקה המילטונית של המילטוניאנים ריבועיים

מיכאל אנטוב

entov@math.technion.ac.il

דינמיקה המילטונית מתארת את ההשתנות של מערכת מכנית קלאסית עם הזמן. במקרה הכי פשוט לניסוח, דינמיקה המילטונית חוקרת את ההתנהגות הפתרונות של המערכת הבאה של משוואות דיפרנציאליות רגילות הנקראות **משוואות המילטון**:

$$\begin{cases} p'(t) &= -\dfrac{\partial H}{\partial q}(p,q) \\ \\ q'(t) &= \dfrac{\partial H}{\partial p}(p,q) \end{cases} \tag{1}$$

כאן $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ הן הקואורדינטות על $\mathbf{R}^{2n}$, $p = (p_1, \ldots, p_n), q = (q_1, \ldots, q_n)$, ו־ $H : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}$ היא פונקציה חלקה הנקראת **ההמילטוניאן** של המערכת.

להלן דוגמה של שאלה חשובה בדינמיקה המילטונית:

שאלה (*): בהינתן המילטוניאן $H : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}$ וקבוצות זרות $X_0, X_1 \subset \mathbf{R}^{2n}$, האם אפשר למצא פתרון $(p(t), q(t))$ של (1) העובר דרך X_0 בזמן $t = 0$ ודרך X_1 באיזשהו זמן $T > 0$? אם כן, מה אפשר להגיד על T?

היעד של הפרויקט המוצע הוא לחקור שאלה (*) עבור קבוצות X_0, X_1 בעלות משמעות פיסיקאית במקרים כאשר ההמילטוניאן $H(p, q)$ הוא תבנית ריבועית. במקרה כזה המשוואות (1) הן לינאריות ואפשר לפתור אותן במפורש אבל זה עדיין לא נותן תשובה מיידית לשאלה (*).
נלמד במהרה את הפרקים הרלוונטיים של אלגברה לינארית, נפתור את השאלה (*) במקרה $n = 1$, ואז נעבור למקרה $n = 2$.

דרישות קדם:
קורסים בסיסיים בתחומים הבאים: אלגברה לינארית (כולל תבניות ביליניאריות וריבועיות וצורת ג'ורדן של מטריצה), חדו"א/אינפי, טופולוגיה כללית, תורת החבורות, מד"ר.

ספרות מומלצת (קריאת הספרים הבאים תעזור למחקר אבל לא מהווה דרישת קדם):

1. Arnold, V., *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, 1989. **Chapters 1-3, 41-42, Appendix 6**.

2. Arnold V., Givental, A., *Symplectic geometry*, in *Dynamical systems, IV, 1-138, Encyclopaedia Math. Sci., 4*, Springer, 2001. **Parts 1,2, 4.1-4.2 of Chapter 1**.

3. McDuff D., Salamon D., *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford University Press, 1998. **Chapters 1.1, 2.1-2.3**

Summer research project: Hamiltonian dynamics of quadratic Hamiltonians

Michael Entov
entov@math.technion.ac.il

Hamiltonian dynamics models the evolution of classical mechanical systems. In the simplest setting, it studies the solutions of the following systems of ODEs, called *the Hamilton equations*:

$$\begin{cases} p'(t) &= -\dfrac{\partial H}{\partial q}(p,q) \\ \\ q'(t) &= \dfrac{\partial H}{\partial p}(p,q) \end{cases} \tag{1}$$

Here $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ are the coordinates on $\mathbb{R}^{2n}$, $p = (p_1, \ldots, p_n), q = (q_1, \ldots, q_n)$, and $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ is a smooth function called *the Hamiltonian* of the system.

Here is an example of an important problem in Hamiltonian dynamics:

Problem (*): Given a Hamiltonian $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ and disjoint sets $X_0, X_1 \subset \mathbb{R}^{2n}$, does there exist a solution $(p(t), q(t))$ of (1) passing through X_0 at $t = 0$ and through X_1 at some $T > 0$? If yes, what can be said about T?

The suggested project is to study Problem (*) for physically meaningful X_0, X_1 in the cases where the Hamiltonian function $H(p,q)$ is a quadratic form. In this case the equations (1) become linear and can be solved explicitly but the answer to Problem (*) is still not immediate.

We will start with learning quickly the basics of the relevant linear algebra, then proceed to solving Problem (*) in the case $n = 1$ and then move to the case $n = 2$.

Prerequisites.

Basic courses in linear algebra (including bilinear and quadratic forms and the Jordan form of a matrix), multivariable calculus, general topology, group theory and ordinary differential equations.

Literature (reading the following books would be helpful but is *not* a prerequisite).

1. Arnold, V., *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, 1989. **Chapters 1-3, 41-42, Appendix 6**.

2. Arnold V., Givental, A., *Symplectic geometry*, in *Dynamical systems, IV, 1-138, Encyclopaedia Math. Sci., 4*, Springer, 2001. **Parts 1,2, 4.1-4.2 of Chapter 1**.

3. McDuff D., Salamon D., *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford University Press, 1998. **Chapters 1.1, 2.1-2.3**