Periodicity in expansion of rational numbers

Ofir David, *email:* eofirdavid@gmail.com
Uri Shapira, *email:* ushapira@gmail.com

Already in your first semester you learn that if you write a number r in decimal expansion, its presentation is periodic if and only if r is rational.

A more interesting question is what can be said on the period of a rational number. Already Gauss asked why $\frac{1}{9} = 0.111...$ and $\frac{1}{11} = 0.090909...$ have small periods of 1 and 2 respectively, while $\frac{1}{7} = 0.142857142857...$ has period 6 which is quite larger. It is easy to check that the period equals exactly the multiplicative order of 10 modulo $9, 11$ and 7 respectively and while $10 \equiv_9 1$ and $10 \equiv_{11} -1$ have orders 1 and 2 respectively, $10 \equiv_7 3$ has order 6 and therefore generates the group $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$. This has led Gauss naturally to ask when is 10 (or more generally some $a \in \mathbb{Z}$) the generator of $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ for p prime. Of course a similar phenomena happens in expansions in other bases. One of the most important conjectures in this field is Artin's conjecture which claims that if $-1 \neq a \in \mathbb{Z}$ and $a \neq b^2$, then a is a primitive root modulo infinitely many primes.

If n is very large and coprime to b, then the period of the expansion of $\frac{1}{n}$ in base b will also be very large and we can ask what sort of patterns do we expect to see in this expansion. For example, in binary expansion, do we expect to see a similar number of zeros and ones? What happens with larger strings like $00, 01, 10, 11$ - do we expect to see each of them about a quarter of the times? In general, will the word $w_1 w_2 \cdots w_k$ appears about $\frac{1}{2^k}$ of the times? Finally, is there a connection between this distribution of words and the multiplicative order of 2 modulo n?

Prerequisites: Group theory. Some basic knowledge in number theory would be helpful but not necessary. For those who have not encountered this subject, it is recommended reading chapters 1-4 in "A Classical Introduction to Modern Number Theory" by Ireland and Rosen, and in particular chapter 4 which is about the structure of the groups $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

מחזוריות בפיתוח של שברים רציונליים

אופיר דוד $email$: eofirdavid@gmail.com
אורי שפירא $email$: ushapira@gmail.com

כבר בסמסטר הראשון למדנו שאם נכתוב מספר r בבסיס עשרוני, אז r הוא רציונלי אמ"מ הפיתוח העשרוני שלו בשלב מסוים יהיה מחזורי.

שאלה יותר מעניינת היא מה ניתן להגיד על המחזור של המספר. כבר גאוס בעצמו שאל למה לפיתוחים $\frac{1}{9}=0.1111...$ ו $\frac{1}{11}=0.090909...$ יש מחזוריות קצרה באורך 1 ו 2 בהתאם, בעוד של $\frac{1}{7}=0.142857142857...$ יש מחזוריות ארוכה בגודל 6. קל לבדוק שאורך המחזור הוא בדיוק הסדר הכפלי של 10 מודולו 9, 11 ו 7 בהתאם ובעוד ש $10\equiv_9 1$ ו $10\equiv_{11}-1$ הם מסדרים 1 ו 2 בהתאם, $10\equiv_7 3$ הוא מסדר 6 ולכן יוצר של החבורה $\left(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}\right)^\times$. זה הוביל את גאוס בצורה מאוד טבעית לשאלה מתי 10 (או באופן כללי $a\in\mathbb{Z}$ כלשהו) הוא יוצר של החבורה הכפלית $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^\times$ עבור p ראשוני. כמובן שתופעה דומה קיימת בפיתוח לשברים בכל בסיס. אחת ההשערות החשובות בתחום זה היא השערת ארטין שאומרת שאם $\mathbb{Z}\ni a\neq -1$ ו $a\neq b^2$ אז a הוא שורש פרימיטיבי מודולו אינסוף ראשוניים.

כאשר n מאוד גדול וזר ל b אז המחזוריות של $\frac{1}{n}$ בפיתוח בבסיס b תהיה גם מאוד גדולה ונוכל לשאול איזה תבניות נצפה למצוא בפיתוח הזה. למשל, האם בפיתוח בינארי נראה כמות דומה של אפסים ואחדים? מה קורה עם מחרוזות יותר גדולות כמו $00,01,10,11$ - האם כל אחת מהן תופיע בערך רבע מהפעמים? באופן כללי, האם מילה $w_1w_2\cdots w_k$ תופיע בערך $\frac{1}{2^k}$ מהפעמים? לבסוף, האם ניתן לקשר בין ההתפלגות של מחרוזות כאלו והסדר הכפלי של 2 מודולו n?

דרישות קדם: תורת החבורות. ידע בסיסי בתורת המספרים רצוי אך לא הכרחי. למי שלא נתקל בנושא מומלץ לקרוא את פרקים 1-4
בספר A Classical Introduction to Modern Number Theory של Ireland and Rosen
עם דגש על פרק 4 שדן על המבנה של החבורות $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^\times$.