

## מחזוריות בפיתוח של שברים רציונליים

אופיר דוד [eofirdavid@gmail.com](mailto:eofirdavid@gmail.com)  
אורי שפירא [ushapira@gmail.com](mailto:ushapira@gmail.com)

כבר בסמסטר הראשון למדנו שאם נכתוב מספר  $r$  בבסיס עשרוני, אז  $r$  הוא רציונלי אם ומתקיים הפיתוח העשרוני שלו בשלב מסוים יהיה מחזורי.

שאלה יותר מעניינת היא מה ניתן להגיד על המחזור של המספר. כבר גאוס בעצמו שאל למה לפיתוחים  $\frac{1}{9} = 0.1111\dots$  ו  $\frac{1}{11} = 0.090909\dots$  יש מחזוריות קצרה באורך 1 ו 2 בהתאם, בעוד של  $\frac{1}{7} = 0.142857142857\dots$  יש מחזוריות ארוכה בגודל 6. קל לבדוק שאורך המחזור הוא בדיוק הסדר הכפלי של 10 מודולו 9, 11 ו 7 בהתאם ובעוד ש  $10 \equiv_{11} -1$  ו  $10 \equiv_9 1$  הם מסדרים 1 ו 2 בהתאם,  $10 \equiv_7 3$  הוא מסדר 6 ולכן יוצר של החבורה  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$ . זה הוביל את גאוס בצורה מאוד טבעית לשאלה מתי 10 (או באופן כללי  $a \in \mathbb{Z}$  כלשהו) הוא יוצר של החבורה הכפלית  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  עבור ראשוני  $p$ . כמובן שתופעה דומה קיימת בפיתוח לשברים בכל בסיס. אחת ההשערות החשובות בתחום זה היא השערת ארטין שאומרת שאם  $a \in \mathbb{Z}$  ו  $a \neq b^2$  אז  $a$  הוא שורש פרימיטיבי מודולו אינסוף ראשוניים.

כאשר  $n$  מאוד גדול וזר ל  $b$  אז המחזוריות של  $\frac{1}{n}$  בפיתוח בבסיס  $b$  תהיה גם מאוד גדולה ונוכל לשאול איזה תבניות נצפה למצוא בפיתוח הזה. למשל, האם בפיתוח בינארי נראה כמות דומה של אפסים ואחדים? מה קורה עם מחזוזות יותר גדולות כמו 00, 01, 10, 11 - האם כל אחת מהן תופיע בערך רבע מהפעמים? באופן כללי, האם מילה  $w_1 w_2 \dots w_k$  תופיע בערך  $\frac{1}{2^k}$  מהפעמים? לבסוף, האם ניתן לקשר בין ההתפלגות של מחזוזות כאלו והסדר הכפלי של 2 מודולו  $n$ ?

**דרישות קדם:** תורת החבורות. ידע בסיסי בתורת המספרים רצוי אך לא הכרחי. למי שלא נתקל בנושא מומלץ לקרוא את פרקים 1-4 בספר A Classical Introduction to Modern Number Theory של Ireland and Rosen עם דגש על פרק 4 שדן על המבנה של החבורות  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ .