במה עוסקת גיאומטריה מודרנית?

סדנת הקיץ של הפקולטה למתמטיקה בטכניון, ספטמבר 2017

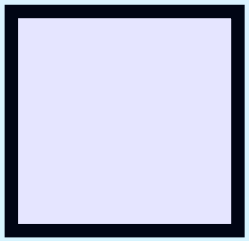
‘Can one hear the shape of a drum ?’

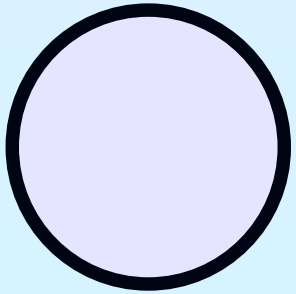
Mark Kac (1914-1984)

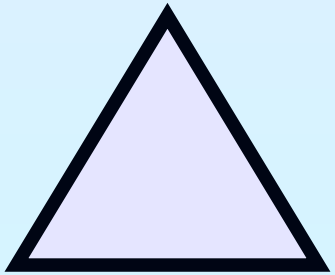
’האם ניתן לשמוע את צורתו של תוף?’

- מרק כץ שאל שאלה זו ב 1966.

- עבור מתמטיקאים ופיסיקאים צורתו של תוף אינה בהכרח עגולה.

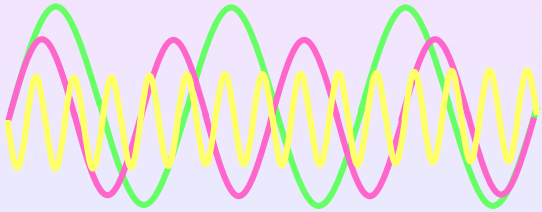




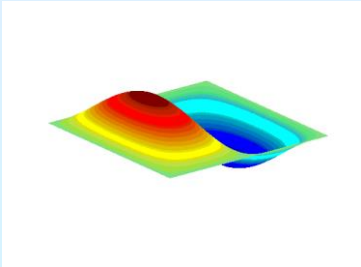


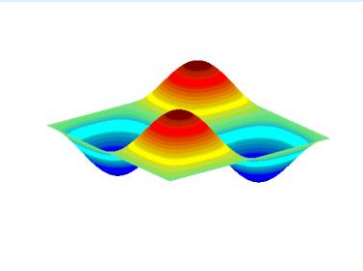
הספקטרום של תוף

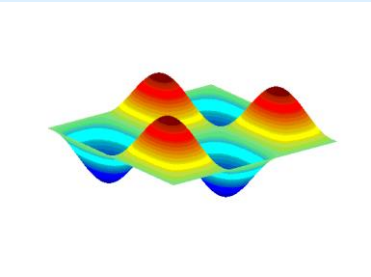
- ***תוף*** הוא קרום גמיש המחובר בהיקפו למסגרת קשיחה.

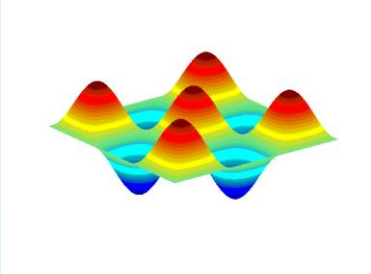


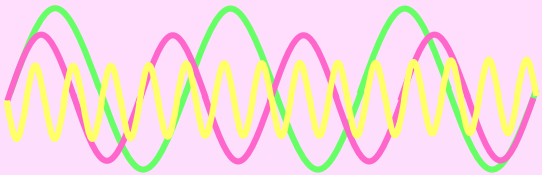
- ***ספקטרום*** התוף הוא אוסף ה***תדירויות*** הבסיסיות בהן קרום התוף יכול להתנודד.





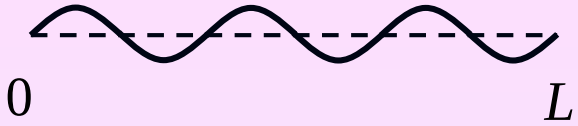






הספקטרום של מיתר

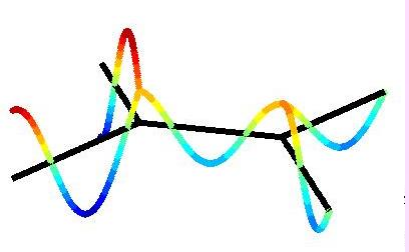
- מיתר משתרע בקטע $[0,L]$.



- $g(x,t)$ היא פונקציה המתארת את גובה פני המיתר במקום ובזמן.
- משוואת הגלים במיתר היא $\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2}g = v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}g}$ כאשר v היא מהירות הגל במיתר.
- נפריד משתנים ונכתוב $g(x,t)=X(x)T(t)$.
- הפתרון הוא $g(x,t)=X(x)\cos(ft)$ כאשר $\boxed{-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}X=\left(\frac{f}{v}\right)^2 X}$ ו $\boxed{\begin{array}{l} X(0)=0 \\ X(L)=0 \end{array}}$
- יש אינסוף פתרונות. לכל מספר טבעי n, $X(x)=\sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)$ הוא פתרון.
- נקבל $\frac{f}{v}=\frac{\pi}{L}n$ ולכן אוסף כל התדירויות של מיתר הוא $\boxed{f\in\left\{\left(\frac{\pi}{L}v\right)n\right\}_{n\in\mathrm{N}}}$

הספקטרום של רשת מיתרים (גרף מיתרים)

- רשת מיתרים מחוברים



הדגמה

- על כל מיתר יש פונקציה נפרדת $X_i(x)$ ונפתור

$$-\frac{d^2}{dx^2}X_i=\left(\frac{f}{v}\right)^2 X_i$$

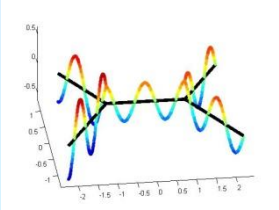
- בנקודת החיבור של שלושה מיתרים נדרוש

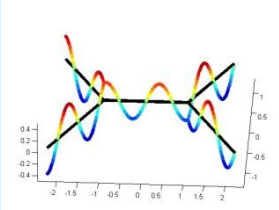
$$X_1(0)=X_2(0)=X_3(0)$$

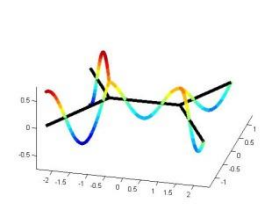
וגם

$$X_1'(0)+X_2'(0)+X_3'(0)=0$$

- גם הפעם יש אינסוף פתרונות.







ספקטרום התדירויות אינו נתון על-ידי נוסחה פשוטה כמקודם.

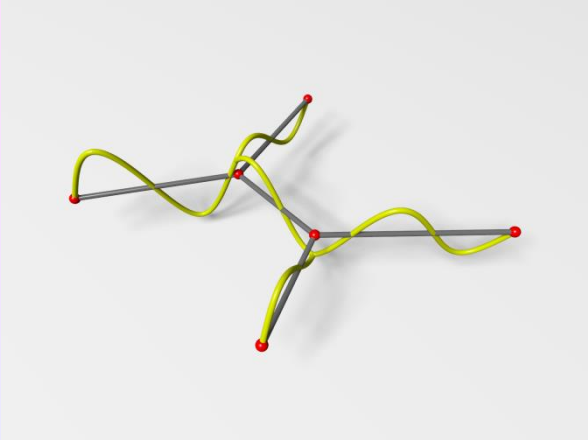
הספקטרום של רשת מיתרים (גרף מיתרים)

הדגמת רשתות מיתרים

'האם ניתן לשמוע את צורתה של רשת מיתרים?'

האם ניתן להסיק מתוך ספקטרום התדירויות של רשת מיתרים את:

- מספר המיתרים
- האורך של כל מיתר
- אילו מיתרים מחוברים זה לזה

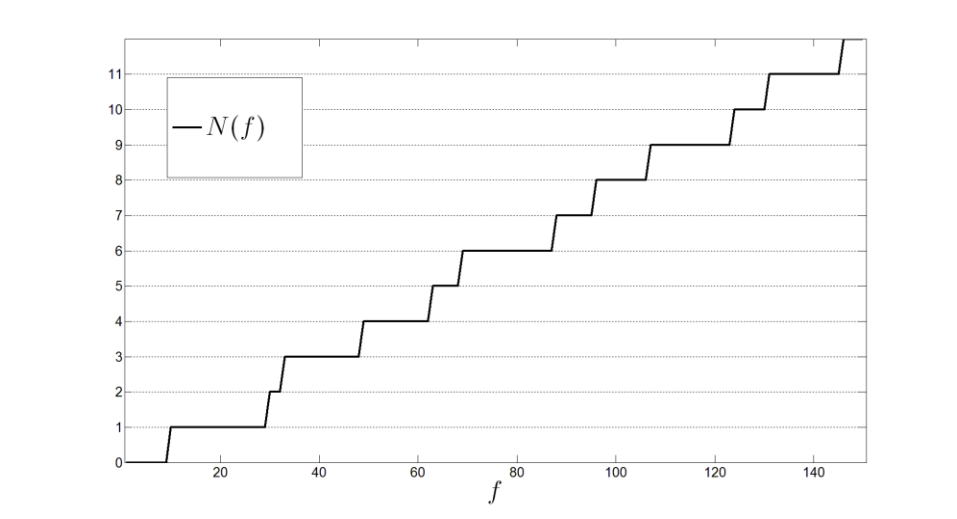


"Personally, I believe that one cannot *hear* the shape,
but I may well be wrong
and I am not prepared to bet large sums either way."
(Kac)

Mark Kac (1914-1984)

Trace formula נוסחת העקבה

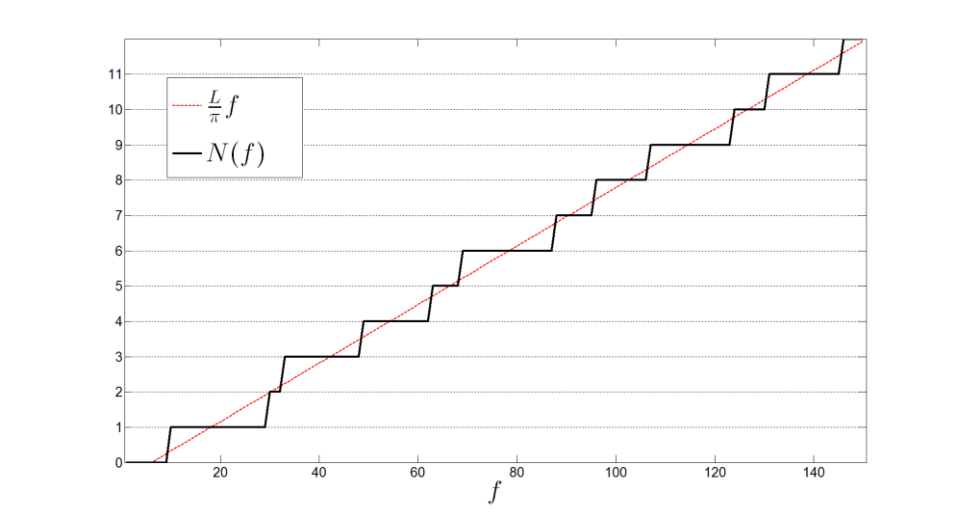
לכל רשת מיתרים קיימת פונקציית ספירת התדירויות שלה, $N(f)$



Trace formula

נוסחת העקבה

לכל רשת מיתרים קיימת פונקציית ספירת התדירויות שלה, $N(f)$



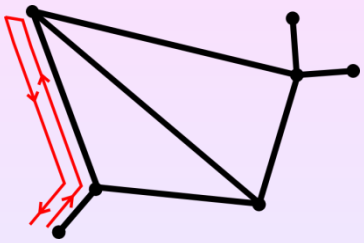
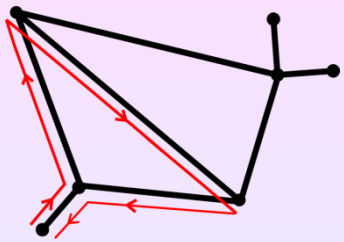
מתקיימת הנוסחה הבאה

$$N(f) = \frac{L}{\pi} f + \ldots$$

כאשר L הוא סך כל אורכי המיתרים ברשת.

Trace formula נוסחת העקבה

מסלול מחזורי על רשת המיתרים הוא מסלול שעובר על רשת המיתרים וחוזר לבסוף לנקודת ההתחלה.

למשל  או 

נסמן כל מסלול ב m ואת אורך המסלול ב l_m.

כעת נוכל להשלים את נוסחת העקבה:

$$N(f) = \frac{L}{\pi} f + \sum_m A_m \sin(l_m f)$$

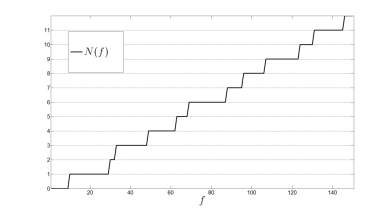
J.P. Roth (1983)

Tsampikos Kottos
ועוזי סמילנסקי (1997)

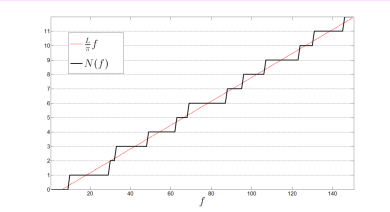
אינסוף תדירויות

אינסוף מסלולים מחזוריים

לשמוע את צורתה של רשת מיתרים

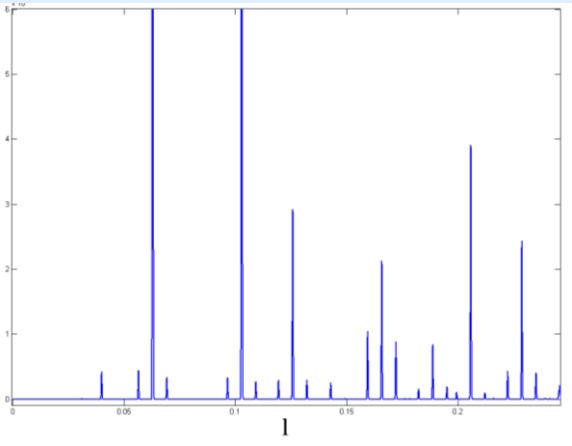


- מתוך ספקטרום התדירויות, נרכיב את פונקציית ספירת התדירויות, $N(f)$

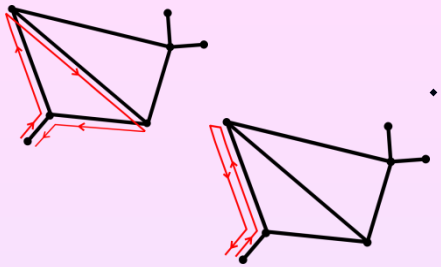


- נחשב את האבר המוביל כקרוב לינארי $N(f)=\frac{L}{\pi}f+\ldots$
- נקבל $\sum_m A_m \sin(l_m f)=N(f)-\frac{L}{\pi}f$
- נוכל לגלות את כל הערכים l_m על-ידי התמרת פורייה

$$h(l)=\int\left\{N(f)-\frac{L}{\pi}f\right\}\sin(l\,f)\,\mathrm{d}f \longrightarrow$$



לשמוע את צורתה של רשת מיתרים



- גילינו את כל האורכים l_m של כל המסלולים המחזוריים.

האם הדבר קובע באופן חד-ערכי את צורת הרשת?

- כן.

בתנאי שאורכי המיתרים אינם תלויים לינארית מעל הרציונליים (Q).
הדבר מבטיח שלא יתכנו שני מסלולים שונים בעלי אותו אורך.

- חשבו על אלגוריתם לכך.

הפתרון במאמר של בוריס גוטקין ועוזי סמילנסקי (2001).

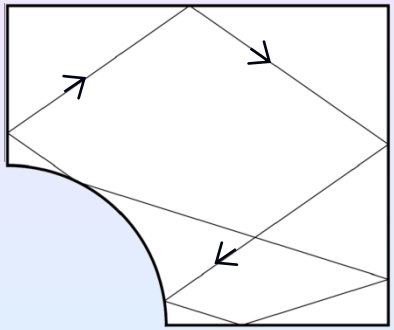
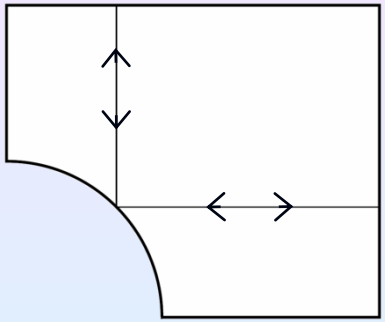
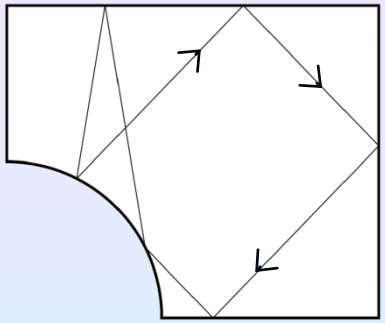
בחזרה לתופים – 'האם ניתן לשמוע את צורתו של תוף?'

- גם כאן יש נוסחת עקבה

$$N(f)=\frac{A}{4\pi}f^2-\frac{L}{4\pi}f+\sum_m\ldots$$

A שטח התוף
L אורך הקפו

- המסלולים המחזוריים הם מסלולי כדור ביליארד המתגלגל על פני התוף.

- ניתן לשחזר את צורתו של תוף בתנאי שהשפה שלו חלקה והוא מקיים אי אלו סימטריות. (Zelditch 2009)

- נוסחת עקבה גם בתורת המספרים – פונקציית הזתא של רימן:

"המוסיקה של המספרים הראשוניים" / מרכוס דו סוטוי

...ומתי אי אפשר לשמוע? - איזוספקטרליות

- שני תופים בעלי אותו ספקטרום תדירויות נקראים **איזוספקטרליים**.

- עוד ב 1964 ג'ון מילנור מצא שני טורוסים איזוספקטרליים ב 16 ממדים.

Toshikazu Sunada

- שיטת סונדה (1985):

תהי G חבורה ו H_1, H_2 תת-חבורות שלה כך שמתקיים

$$\forall g \in G \quad \left|\{[g] \cap H_1\}\right| = \left|\{[g] \cap H_2\}\right|$$

($[g]$ היא קבוצת האברים הצמודים ל $[g]$).

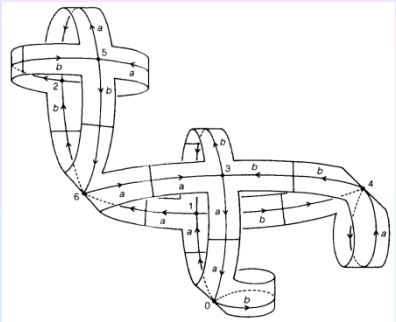
בהינתן יריעה, M, ש G חבורת סימטריות שלה,
ניתן ליצור שתי יריעות חדשות, M/H_1 ו M/H_2 שהן איזוספקטרליות.

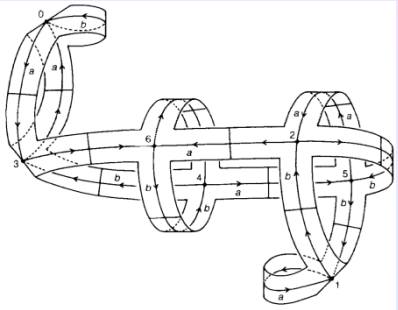
...ומתי אי אפשר לשמוע? - איזוספקטרליות

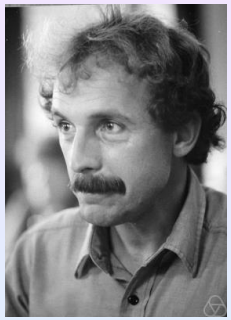
רוברט ברוקס
(1952-2002)

- רוברט ברוקס חקר את שיטת סונדה ומצא דוגמאות רבות ליריעות וגרפים איזוספקטרליים.

- פיטר בוסר מצא שתי יריעות דו-ממדיות איזוספקטרליות (1986).





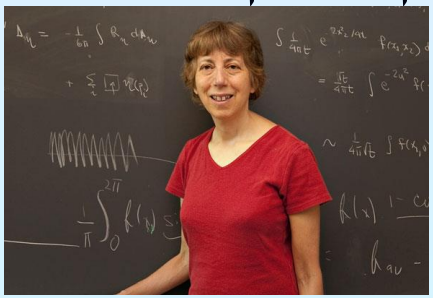


Peter Buser

- קרוליין גורדון הרצתה על היריעות הללו.

סקוט וולפרט העיר מתוך הקהל.

Scot Wolpert

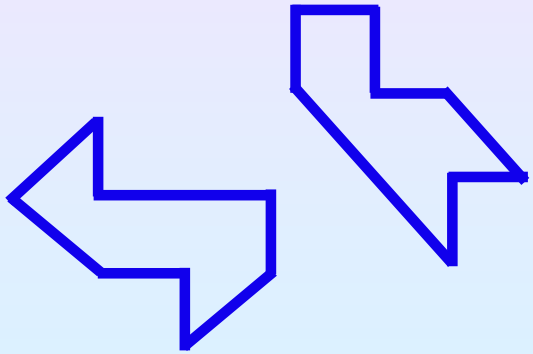


Carolyn Gordon

יש תופים איזוספקטרליים

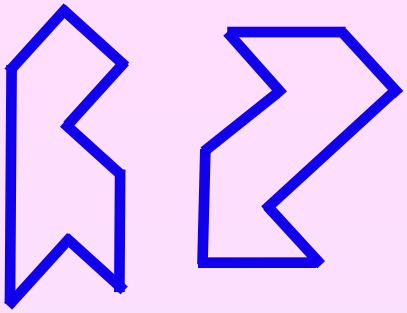
Gordon, Webb and Wolpert (1992):

‘One <u>cannot</u> hear the shape of a drum’



'לא ניתן לשמוע את צורתו של תוף'

Carolyn Gordon and David Webb



הוכחה לאיזוספקטרליות

המשוואה הקובעת את התדירויות של תוף

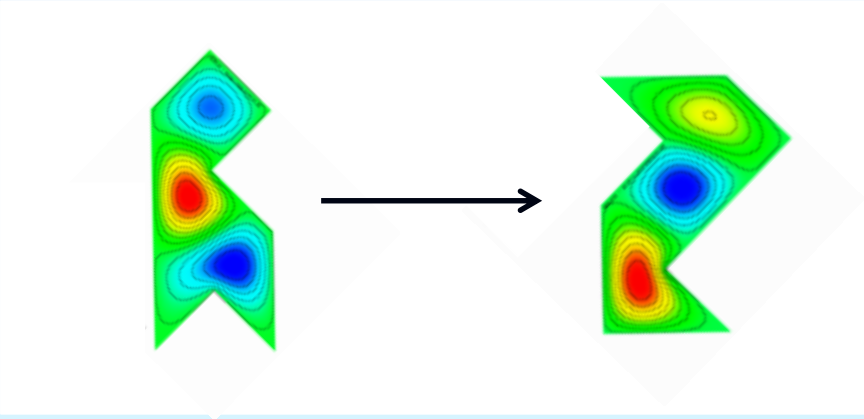
היא $\boxed{-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)X=\left(\frac{f}{v}\right)^2 X}$ והתנאי הוא ש $\boxed{X\big|_{\text{boundary}}=0}$

נמצא העתקה ששולחת פונקצייה על תוף אחד, $X(x,y)$

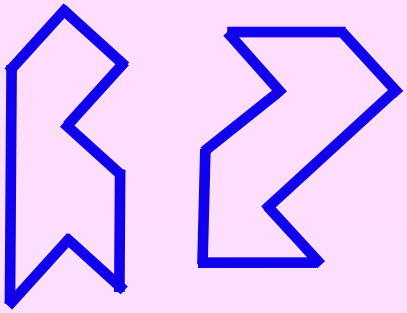
לפונקצייה על התוף השני, $Z(x,y)$

באופן ששתיהן יקיימו את המשוואה מעלה עם אותה התדירות

$$X(x,y) \longrightarrow Z(x,y)$$



אם נצליח לעשות זאת לכל התדירויות גם יחד, נוכיח שהתופים איזוספקטרליים.

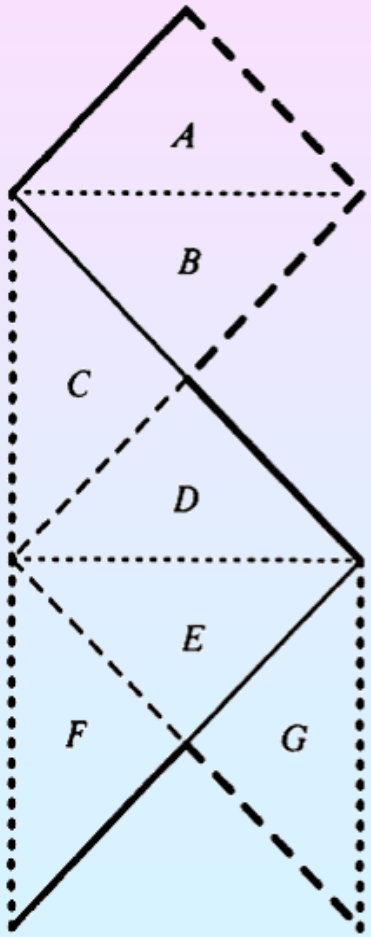


הוכחה לאיזוספקטרליות - טרנספלנטציה

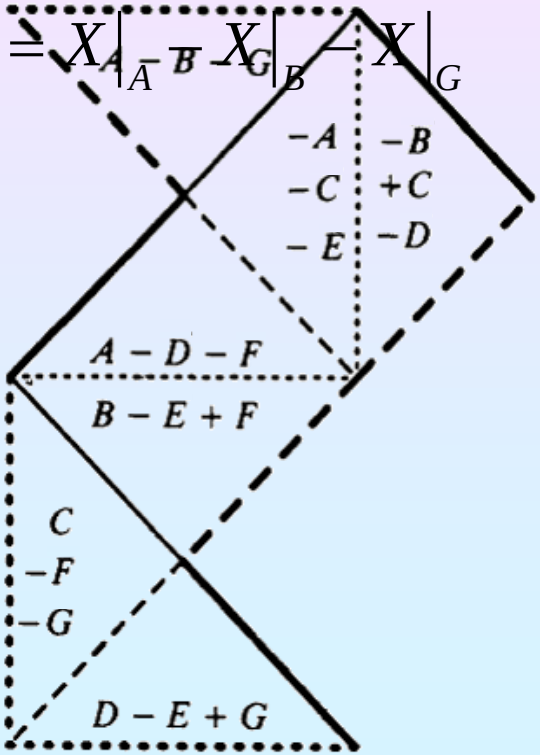
המשוואה הקובעת את התדירויות של תוף

היא $\boxed{-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)X=\left(\frac{f}{v}\right)^2 X}$ והתנאי הוא ש $\boxed{X\big|_{\text{boundary}}=0}$

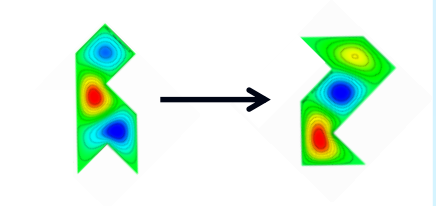
$$Z\big|_A = X\big|_A - X\big|_B - X\big|_G$$



X

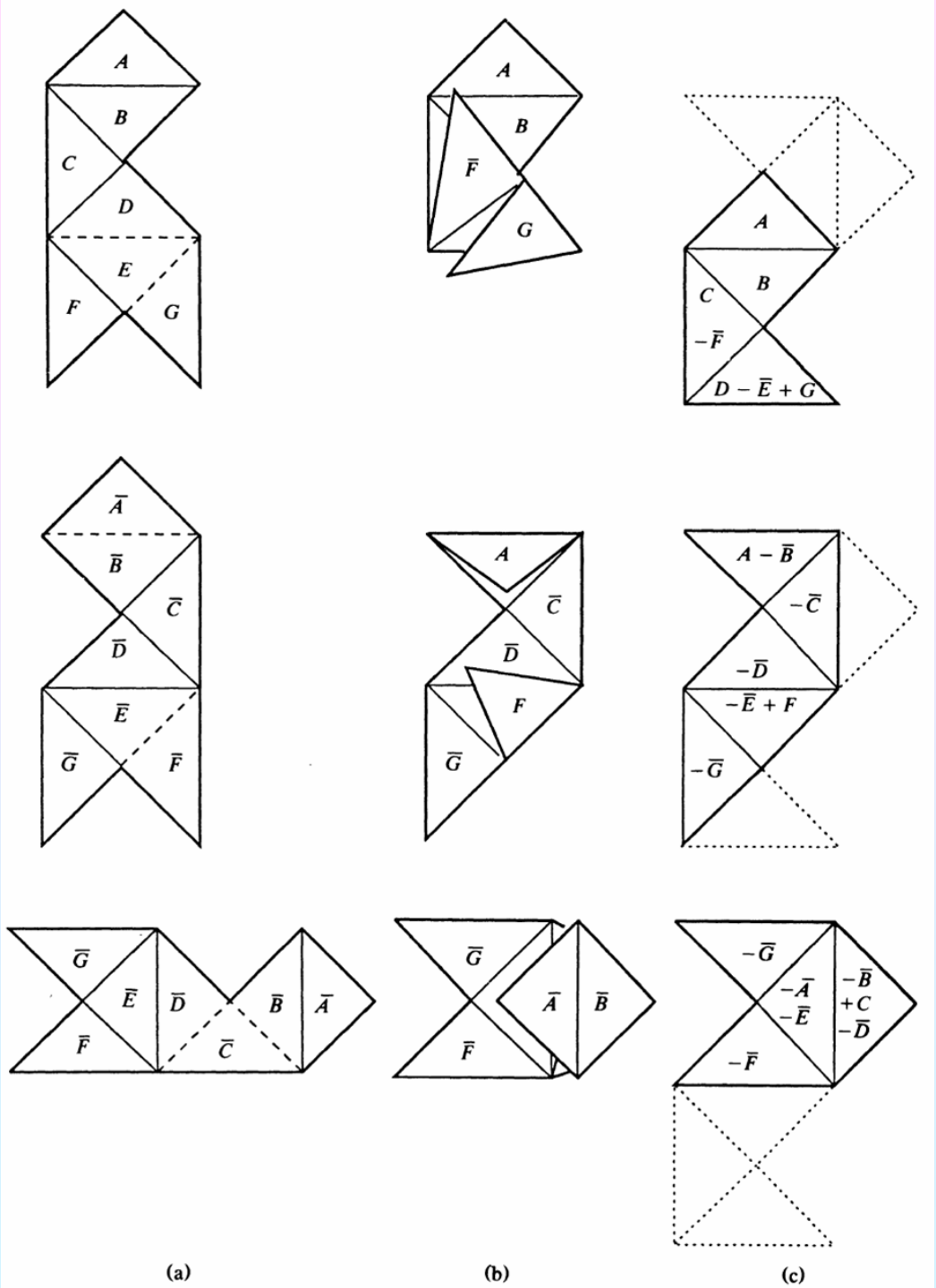


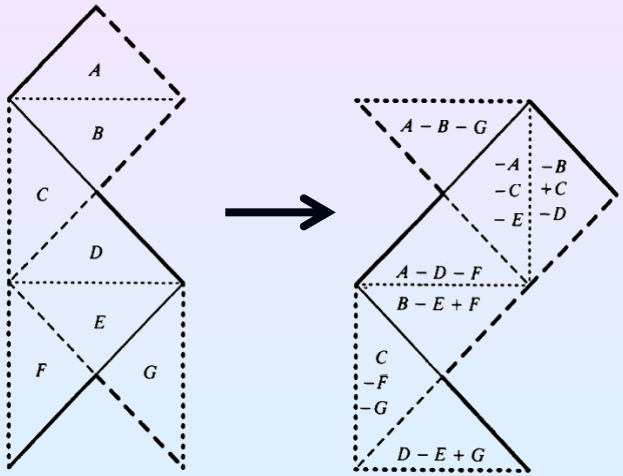
Z



הוכחת אוריגמי

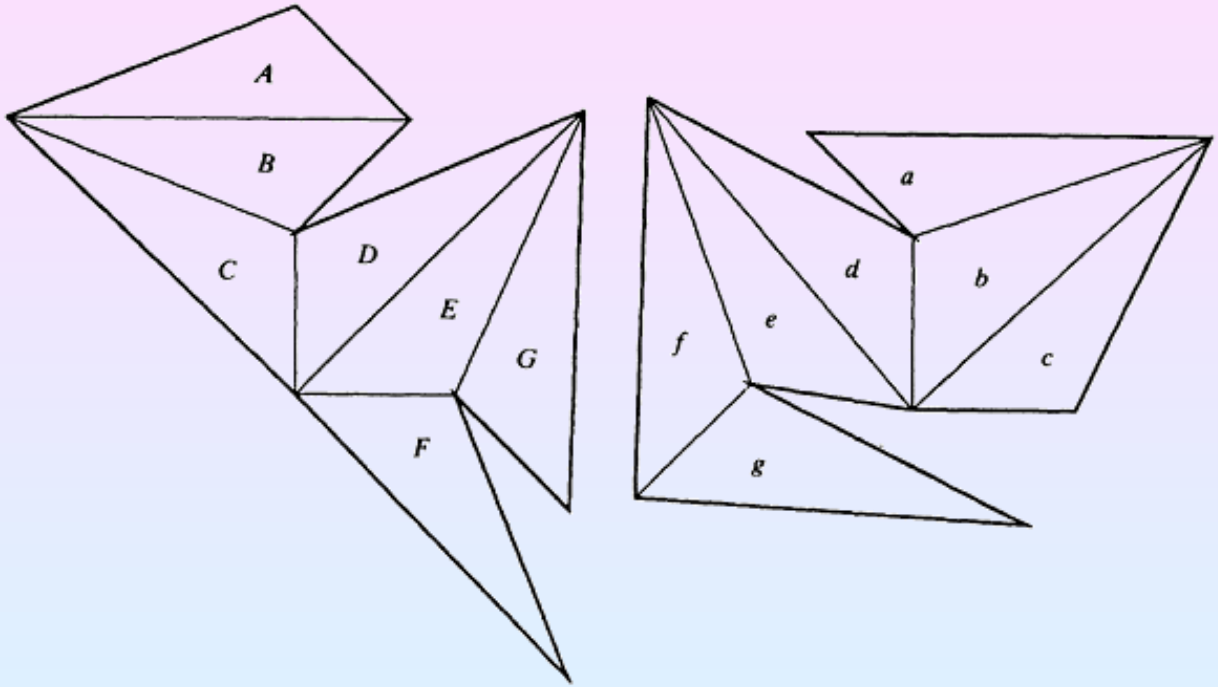
S.J. Chapman (2000)

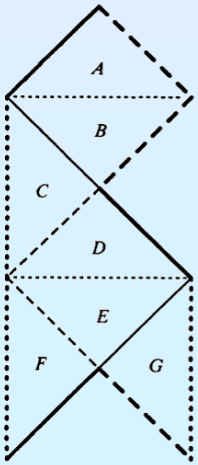


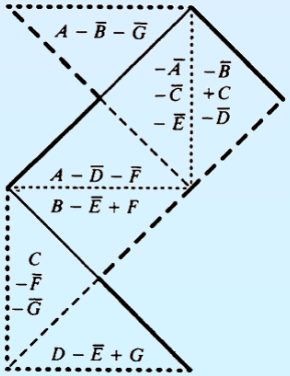


עוד תופים איזוספקטרליים

נשתמש באבן בניין שונה

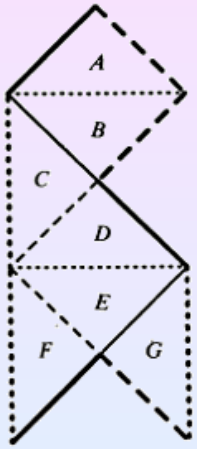


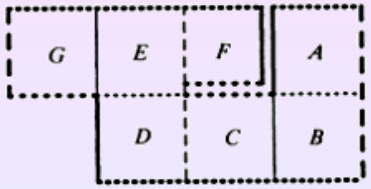


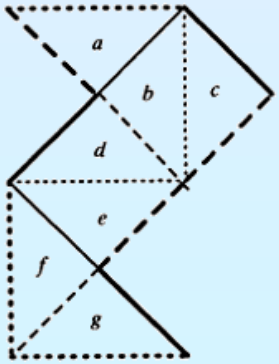


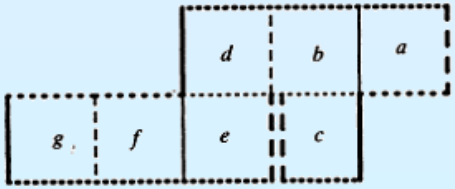
עוד תופים איזוספקטרליים

... או אפילו באבן בניין שאינה משולשת



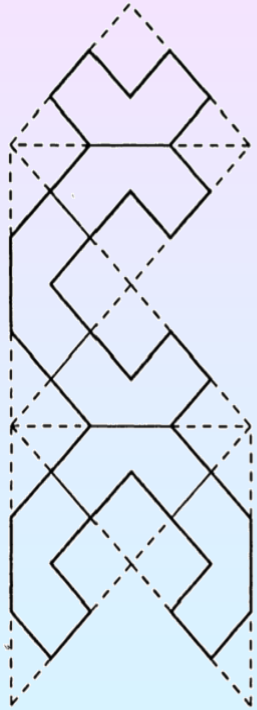


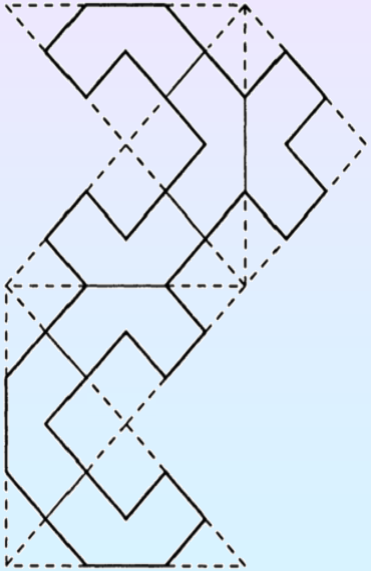




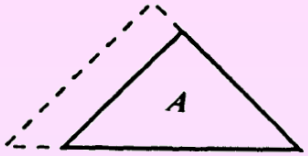
עוד תופים איזוספקטרליים

... או נחתוך את אבן הבנין ונקבל את הזוג המקורי

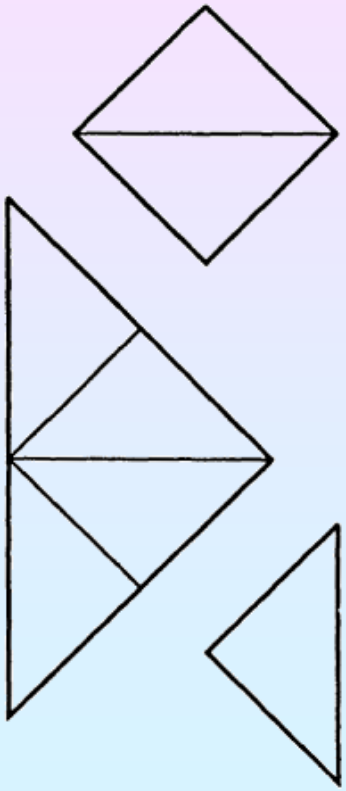


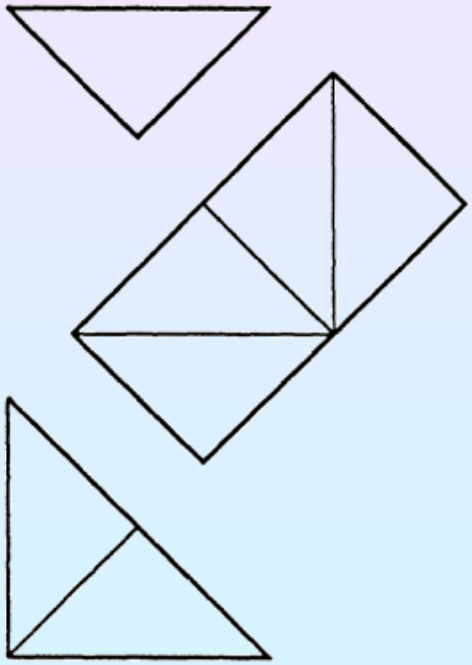


עוד תופים איזוספקטרליים



... או אם נחתוך לא בזהירות, נוכל לפגוע בקשירות



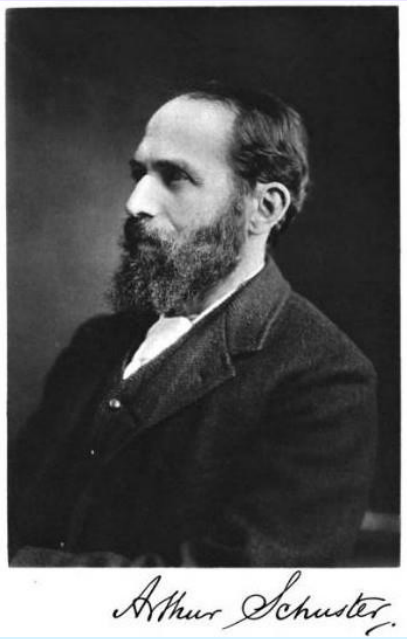


בחזרה לפולניה

Mark Kac (1914-1984)

"I first heard the problem posed this way some ten years ago from Professor Bochner. Much more recently, when I mentioned it to Professor Bers, he said, almost at once, 'You mean, if you had perfect pitch could you find the shape of a drum.' " (1966)

"To find out the different tunes sent out by a vibrating system is a problem which may or may not be solvable in certain special cases, but ***it would baffle the most skillful mathematician to solve the inverse problem and to find out the shape of a bell by means of the sounds which it is capable of sending out***. And this is the problem which ultimately spectroscopy hopes to solve in the case of light. In the meantime we must welcome with delight even the smallest step in the right direction." (1882)



Arthur Schuster (1851-1934)