Hilbert function spaces of analytic functions in a complex variable

Supervisors: Satish Pandey and Orr Shalit

A ***Hilbert function space*** is a Hilbert space consisting of "bona fide" functions on a set X, in which the functional $f \mapsto f(x)$ that takes a function f and returns its value $f(x)$ at a point $x \in X$ is a bounded functional. Here is an example: the space of all analytic functions $f(z) = \sum a_n z^n$ in the unit disc with square summable Taylor coefficients, i.e., $\sum |a_n|^2 < \infty$ (on the other hand $L^2(0,1)$ is **not** an example, because functions are only defined "almost everywhere"; the point evaluation $f \mapsto f(x)$ is meaningless).

The fact that point evaluation is a bounded functional makes a connection between function theory and Hilbert space theory, and a very rich theory emerges in which function theory and operator theory can benefit one from the other.

In this project the students will learn the rudiments of Hilbert function space theory, and dive into the study of some concrete problems concerning Hilbert function spaces of recent interest. For example, a central question that we might tackle is: how does the geometry of the set of points on which a Hilbert function space “lives” (a subset in the complex plane) reflect in the structure of the function space? Another question is: when are two such Hilbert function spaces isomorphic?

Wait a minute: aren't all (separable) Hilbert spaces isomorphic? As abstract Hilbert spaces yes, but if you add the additional structure of a Hilbert function space things are quite different.

This project is made for students who love complex function theory and/or functional analysis, and therefore it is best suited for those students who have completed a course in at least one of these subjects.

Links:
https://noncommutativeanalysis.wordpress.com/2013/01/19/advanced-analysis-notes-16-hilbert-function-spaces-basics/

https://noncommutativeanalysis.wordpress.com/2013/01/23/advanced-analysis-notes-17-hilbert-function-spaces-picks-interpolation-theorem/

<u>מרחבי הילברט של פונקציות במשתנה מרוכב</u>

<u>מנחים: סטיש פנדיי ואור שליט</u>

"מרחב הילברט של פונקציות" (או "מרחב פונקציות הילברטיאני") הוא מרחב הילברט שהאיברים בו הן פונקציות המוגדרות על קבוצה X, המקיים שלכל נקודה $x \in X$ מתקיים שהפונקציונל $x \mapsto f(x)$ השולח פונקציה לערך שלה בנקודה x הוא פונקציונל מוגדר היטב וחסום. הנה דוגמא: המרחב של כל הפונקציות האנליטיות $f(z) = \sum a_n z^n$ בעיגול היחידה המקיימות $\sum |a_n|^2 < \infty$ (מצד שני, המרחב $L^2(0,1)$ הוא **לא** דוגמא כיון שהפונקציות במרחב זה מוגדרות רק "כמעט בכל מקום״, אין שום משמעות להצבה $f \mapsto f(x)$ כי לפונקציה אין ערך מוגדר היטב בנקודה).

העובדה שהערכה בנקודה היא פונקציונל חסום היא נקודת חיבור בין תורת הפונקציות לתורה של מרחבי הילברט, והן תורת הפונקציות ותורת האופרטורים יוצאות נשכרות מחיבור זה.

בפרויקט המוצע נלמד את יסודות התורה של מרבי הילברט של פונקציות, ולאחר מכן נחקור מספר בעיות קונקרטיות הקשורות למרחבי הילברט של פונקציות הנלמדות במחקר עכשווי. בעיה מרכזית שתעניין אותנו היא: מתי המרחבים הללו איזומורפיים?

אבל רגע: האם לא כל מרחבי ההילברט איזומורפיים זה לזה? כמרחבי הילברט מופשטים כן, אך לא אם לוקחים בחשבון גם את המבנה שלהם כמרחבי פונקציות הילברטיאניים.

<u>דרישות קדם</u>. הפרויקט מיועד לסטודנטים שאוהבים את תורת הפונקציות המרוכבות ו/או אנליזה פונקציונלית, לכן רצוי שיהיו בוגרים של קורס בלפחות אחד מהנושאים הללו.